## Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Această metodă de optimizare neliniară elimină restricțiile de tip egalitate incluzându-le într-o nouă funcție obiectiv şi mărind simultan numărul de variabile al problemei de optimizare.

Fie următoarea problemă:

$$\begin{aligned} &\min F(x) \\ &g_i(x)=0 \quad i=\overline{1,m} \quad x\in R^n \quad m<n \end{aligned} \tag{7.1}$$

Pentru această problemă se consideră funcția Lagrange asociată:

$$\mathsf{L}(x,\lambda)=F(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) \quad x\in R^n \quad \lambda\in R^m \tag{7.2}$$

Determinarea extremului noii funcții obiectiv $\mathsf{L}(x,\lambda)$ constituie o problemă de optimizare fără restricții. În punctul de extrem ($x$*,$\lambda$) va fi îndeplinită condiția:

$$\nabla\mathsf{L}\left(x^*,\lambda\right)=0 \tag{7.3}$$

care reprezintă un sistem de $n+m$ ecuații cu tot atâtea necunoscute:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathsf{L}(x^*,\lambda)}{\partial x_1}=\dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_1}=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\mathsf{L}(x^*,\lambda)}{\partial x_n}=\dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_n}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_n}=0 \\ \dfrac{\partial\mathsf{L}(x^*,\lambda)}{\partial \lambda_1}=g_1(x^*)=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\mathsf{L}(x^*,\lambda)}{\partial \lambda_m}=g_m(x^*)=0 \end{cases} \tag{7.4}$$

Necunoscutele acestui sistem sunt cele $n$ componente ale soluției optime $x^*$ şi cei $m$ multiplicatori ai lui Lagrange $\lambda_i, \ldots, \lambda_m$.

Ultimele $m$ ecuații ale acestui sistem arată că în punctul de extrem al lui $\mathsf{L}(x,\lambda)$ toate restricțiile sunt verificate, deci acesta este în mod obligatoriu o soluție admisibilă pentru problema inițială.

Primele $n$ ecuații ale sistemului pot fi scrise sub formă vectorială:

$$\nabla F(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \qquad (7.5)$$

Sistemul de ecuații este liniar numai dacă funcția obiectiv este pătratică sau liniară iar restricțiile sunt liniare, caz în care soluția problemei de optimizare inițială poate fi obținută uşor.

În celelalte situații se obține un sistem neliniar a cărui soluție poate fi obținută prin metode numerice.

De aici rezultă principalul dezavantaj al acestei metode: obținerea soluției problemei de optimizare presupune rezolvarea unui sistem de ecuații cu un număr de necunoscute mei mare decât numărul de variabile al problemei inițiale. Deoarece rezolvarea numerică a sistemului presupune folosirea unei metode iterative, se poate dovedi mai avantajoasă ca timp de calcul folosirea unei metode iterative de rezolvare a problemei de optimizare inițiale (de exemplu o metodă de gradient).

În cazul problemelor de optimizare în cadrul sistemelor electroenergetice de dimensiune mare (mii de noduri şi de laturi) şi care au un număr mare de restricții, problema sub forma funcției Lagrange poate fi mult mai complicată decât cea inițială datorită variabilelor suplimentare pe care le introduce.

Dacă se aplică metoda de transformare a restricțiilor de tip inegalitate în restricții de tip egalitate prin introducerea variabilelor ecart (transformarea Valentine), metoda multiplicatorilor lui Lagrange poate fi extinsă şi pentru cazul problemelor de optimizare care au restricții de tip inegalitate.

Fie problema de optimizare:

$$
\begin{aligned}
&\min F(x) \\
&g_i(x)=0 \quad i=\overline{1,m} \quad x\in R^n \quad m<n \\
&h_j(x)\le 0 \quad j=\overline{1,q}
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

echivalentă cu:

$$
\begin{aligned}
&\min F(x) \\
&g_i(x)=0 \qquad\qquad i=\overline{1,m} \quad x\in R^n \quad m<n \\
&h_j(x)+y_j^2=0 \quad j=\overline{1,q}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

După cum se poate observa cele $q$ restricții de tip inegalitate au fost transformate în restricții de tip egalitate prin introducerea a $q$ variabile suplimentare $y$. Pentru această problemă modificată se poate construi funcția Lagrange sub forma:

$$
\mathsf{L}(x,y,\lambda,\mu)=F(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{q}\mu_j\left[h_j(x)+y_j^2\right]
\tag{7.8}
$$

pentru care trebuie determinat un punct de extrem fără restricții:

$$
\begin{aligned}
&\min \mathsf{L}(x,y,\lambda,\mu) \\
&x\in R^n \quad y\in R^q \quad \lambda\in R^m \quad \mu\in R^q
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Sistemul de $n$+$m$+2$q$ ecuații, care reprezintă condițiile necesare de extrem pentru această problemă, este de forma (7.10).

În acest caz complexitatea sistemului este şi mai mare deoarece pentru fiecare restricție de tip inegalitate vor fi introduse două necunoscute suplimentare (variabila de ecart corespunzătoare $y_i$ şi multiplicatorul lui Lagrange $\lambda_i$), iar sistemul este întotdeauna neliniar deoarece variabila ecart, pentru a evita introducerea unei condiții suplimentare de pozitivitate, a fost introdusă la pătrat.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathsf{L}\left(x^*, y, \lambda, \mu\right)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial F\left(x^*\right)}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1\left(x^*\right)}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m\left(x^*\right)}{\partial x_1} + \\
\qquad + \mu_1 \dfrac{\partial h_1\left(x^*\right)}{\partial x_1} + \cdots + \mu_q \dfrac{\partial h_q\left(x^*\right)}{\partial x_1} = 0 \\
\vdots \\
\dfrac{\partial \mathsf{L}\left(x^*, y, \lambda, \mu\right)}{\partial x_n} = \dfrac{\partial F\left(x^*\right)}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1\left(x^*\right)}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m\left(x^*\right)}{\partial x_n} + \\
\qquad + \mu_1 \dfrac{\partial h_1\left(x^*\right)}{\partial x_n} + \cdots + \mu_q \dfrac{\partial h_q\left(x^*\right)}{\partial x_n} = 0 \\
\dfrac{\partial \mathsf{L}\left(x^*, y, \lambda, \mu\right)}{\partial y_1} = 2\mu_1 y_1^2 = 0 \\
\vdots \\
\dfrac{\partial \mathsf{L}\left(x^*, y, \lambda, \mu\right)}{\partial y_q} = 2\mu_q y_q^2 = 0 \\
\dfrac{\partial \mathsf{L}\left(x^*, y, \lambda, \mu\right)}{\partial \lambda_1} = g_1(x^*) = 0 \\
\vdots \\
\dfrac{\partial \mathsf{L}\left(x^*, y, \lambda, \mu\right)}{\partial \lambda_m} = g_m(x^*) = 0 \\
\dfrac{\partial \mathsf{L}\left(x^*, y, \lambda, \mu\right)}{\partial \mu_1} = h_1(x^*) + y_1^2 = 0 \\
\vdots \\
\dfrac{\partial \mathsf{L}\left(x^*, y, \lambda, \mu\right)}{\partial \mu_q} = h_q(x^*) + y_q^2 = 0
\end{cases}
\qquad (7.10
$$

)

O situație destul de frecvent întâlnită în practică este cazul funcțiilor obiectiv pătratice şi restricțiilor liniare care, folosind produsul scalar, pot fi scrise sub forma (7.11).

$$F : R^n \to R \quad F(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$
$$g : R^n \to R^m \quad g(x) = C \cdot x - d$$
$$A \in M_{n\times n},\ A - \text{simetrica},\ b \in R^n, \quad C \in M_{m\times n},\ b \in R^m$$

(7.11)

problema de optimizare fiind:

$$\begin{aligned} &\min F(x) \\ &g(x) = 0 \end{aligned} \tag{7.12}$$

În acest caz gradientul funcției obiectiv este o funcție liniară iar gradientul restricțiilor este constant:

$$\begin{aligned} &\nabla F(x) = A \cdot x - b \\ &\nabla g(x) = C \end{aligned} \tag{7.13}$$

Dacă matricea *C* este o matrice de rang *m*, prin aplicarea metodei multiplicatorilor lui Lagrange se obține următorul sistem liniar de ecuații:

$$\begin{cases} A \cdot x + C^T \lambda - b = 0 \\ C \cdot x - d = 0 \end{cases} \tag{7.14}$$

echivalent cu ecuația matriceală:

$$\begin{pmatrix} A & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

*Aplicație*

Se consideră circuitul din figura 7.1.

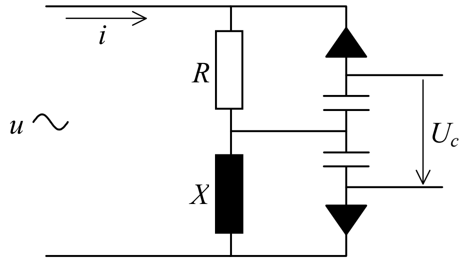


**Fig.7.1** *Schema electrică a circuitului*

Se cere să se determine valorile $R$ şi $X$ astfel încât să se minimizeze tensiunea continuă de ieşire $U_c$ în regim permanent, respectând următoarele valori pentru valorile efective ale tensiunii alternative de intrare $u$ şi curentului $i$:

$$U = 110\,V$$
$$I = 0{,}1\,A$$

Se va considera că ieşirea circuitului este în gol iar frecvența este de 50 Hz.

Pentru început nu se va include în problema de optimizare condiția fizică $R$>0.

Modelul matematic este reprezentat de următoarele ecuații:

$$\min U_c = \min\left(-\sqrt{2}IR + \sqrt{2}IX\right) = \min\sqrt{2}\cdot 0{,}1(-R + X)$$
$$R^2 + X^2 = \left(\frac{110}{0{,}1}\right)^2$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\min(-R+X)$$
$$R^2+X^2-1.210.000=0$$

Funcția Lagrange va fi de forma:

$$\mathrm{L}(R,X,\lambda)=-R+X+\lambda\left(R^2+X^2-1.210.000\right)$$

iar sistemul de ecuații care trebuie rezolvat pentru determinarea soluției optime:

$$\begin{cases}-1+2\lambda R=0\\ 1+2\lambda X=0\\ R^2+X^2-1.210.000=0\end{cases}$$

Acest sistem are două soluții:

$$\begin{cases}R=\dfrac{1.100}{\sqrt{2}}\\ X=-\dfrac{1.100}{\sqrt{2}}\\ \lambda=\dfrac{1}{1.100\sqrt{2}}\end{cases}\qquad\begin{cases}R=-\dfrac{1.100}{\sqrt{2}}\\ X=\dfrac{1.100}{\sqrt{2}}\\ \lambda=-\dfrac{1}{1.100\sqrt{2}}\end{cases}$$

dintre care numai una, şi anume:

$$\begin{cases}R=\dfrac{1.100}{\sqrt{2}}\\ X=-\dfrac{1.100}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

corespunde soluției optime a problemei inițiale, aşa cum se poate observa în figura următoare.

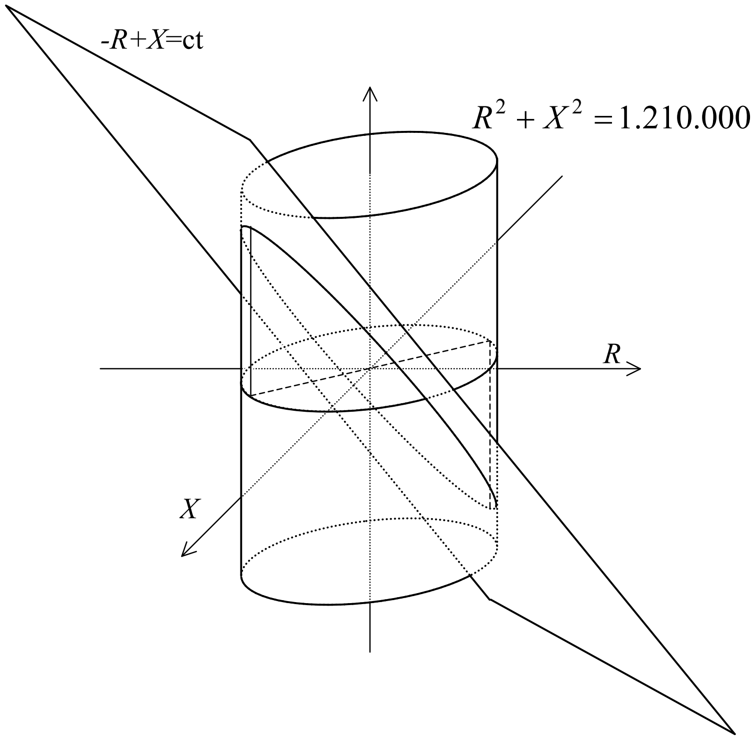


**Fig.7.2** *Reprezentarea grafică a funcției obiectiv şi restricției*

Prima dintre aceste soluții reprezintă soluția optimă căutată, cea de a doua reprezentând un punct de maxim pentru funcția obiectiv şi nu unul de minim.

În continuare se va considera că se include şi condiția ca rezistența circuitului să fie o mărime pozitivă în problema de optimizare, obținând:

$$\min(-R + X)$$
$$R^2 + X^2 - 1.210.000 = 0$$
$$R \geq 0$$

echivalentă cu:

$$\min(-R + X)$$
$$R^2 + X^2 - 1.210.000 = 0$$
$$R - y^2 = 0$$

În acest caz funcția Laplace va fi:

$$\mathsf{L}(R, X, y, \lambda, \mu) = -R + X + \lambda\left(R^2 + X^2 - 1.210.000\right) + \mu\left(R - y^2\right)$$

Punând condițiile de extrem se obține sistemul:

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda R + \mu = 0 \\ 1 + 2\lambda X = 0 \\ -2\mu y = 0 \\ R^2 + X^2 - 1.210.000 = 0 \\ R - y^2 = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$\begin{cases} R = \dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ X = -\dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{\sqrt{1.100}}{\sqrt[4]{2}} \\ \lambda = \dfrac{1}{1.100\sqrt{2}} \\ \mu = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R = 0 \\ X = 1.100 \\ y = 0 \\ \lambda = \dfrac{1}{2.200} \\ \mu = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} R = 0 \\ X = -1.100 \\ y = 0 \\ \lambda = -\dfrac{1}{2.200} \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Pe baza unui studiu local se determină că dintre cele trei soluții numai prima este un punct de minim pentru funcția obiectiv $U_c$, deci se obține aceeași soluție ca și în cazul anterior.